新北市 108 學年度國小一般智能
資優學生獨立研究作品

參展類別：數學類

作品名稱：點點相連—豆芽遊戲之探究

學校：新北市中正國小

研究者：李浩霆、李心安

指導老師：李家兆老師

點點相連—豆芽遊戲之探究

研究者：李浩霆、李心安
單位：新北市新店區中正國小資優資源班
通訊處：新北市新店區三民路 36 號
G-Mail：xdgtr0804@gmail.com
指導老師：李家兆老師

摘要

本研究探討豆芽遊戲原規則「一點連 3 次、中間加點、可自連自」的勝負關鍵以及先、後手勝率，並且改變了 3 種規則，1、一點連 3 次、中間加點、不可自連自，我們探討本規則的所有路徑和勝率，發現先手勝率遠大於後手。2、一點連≥2 線、中間不加點、不可自連自，由於此規則限制非常多，因此它只有一條路徑，且 M=奇數時，先手必勝，M=偶數時，後手必勝，我們將探討它的圖形和它的規律。3、一點連≥2 次、中間不加點、可自連自，我們決定深入探討此規則，我們歸納出它結束時所有圖形，並以結束時圖形的樣子，歸納出了一個公式：M÷2+1，並且找出了以不同路徑畫出來的所有數量的規律。

壹、研究動機

第一次玩到豆芽遊戲（Sprouts）是老師給我們的挑戰，豆芽遊戲是由一位英國的數學家 John Horton Conway 發明的紙筆遊戲，原本只因無聊隨便畫畫，卻意外發現了特殊的規則。當時我們覺得很有趣，也覺得這種紙筆遊戲的規則、玩法應該不只一種，如果拿來研究一定很有挑戰性，於是就決定和同學一起研究這個遊戲，以下是豆芽遊戲的規則：

豆芽遊戲（Sprouts）

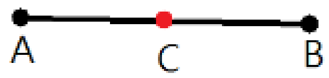
開始狀態：先在紙上畫 N 個點(最少 2 點)

遊戲結束：玩到沒有可以被線碰的點時，最後一步者勝利。

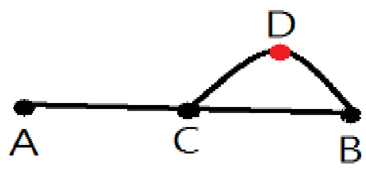
遊戲規則：豆芽遊戲的玩法是兩人輪流著玩。在紙上畫 N 個點，並在兩點之間畫上一條線，在畫上的線中間任意位置加一個點（**中間可加點**）。每個點都只能被線碰到 3 次（**一點連 3 次**）。

遊戲開始時紙上有點 A 與點 B，

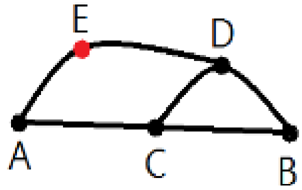
先手在點 A 和點 B 之間連 1 條線，加上點 C，



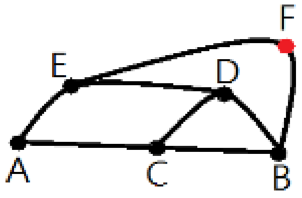
後手將點 B 與點 C 連線加上點 D



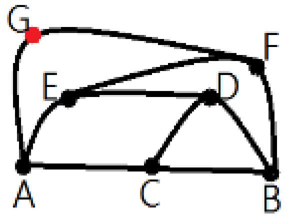
先手將點 A 與點 D 連線加上點 E



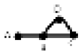
後手將點 E 與點 B 連線加上點 F



先手將點 F 與點 A 連線加上點 G(遊戲結束)



貳、名詞釋義

一、　**一點連 M 次：**以 M 表示一個點可以被碰的次數，M=3 代表一個點可被線碰 3 次，被碰 3 次以後就不能再連線了。例如： A 點被線碰到 1 次，B 點 3 次，C 點 2 次，D 點 2 次，所以 M=3 時，B 點就不能再被線碰到了。

二、　**起始點為 N：**以 N 表示起始點的數量，起始點就是指遊戲一開始紙上的點，N=3 代表遊戲一開始只上有三個點，在本研究，我們統一以 N=2 為規則，以下研究將省略說明起始點數目。

三、　**中間加點：**畫一條線時，要在此線段上加一個點。例如： 紅點為畫線後加上的點，若遊戲規則為中間加點，則每畫一條線就要做一次這個動作。

四、　**中間不加點：**畫一條線時，不需在線段上加一個點。此規則和中間加點相反，不論 M 是多少，玩到最後束時還是只有起始點，不需畫一條線就加點。

五、　**可自連自：**畫線時，可不用在兩個點之間連一條線，而是在一個點上畫線，從一個點出發畫線畫回同一個點，就稱為自連自。例如：紅色線為自連自，從左邊的點出發又畫回左邊的點。

六、　**不可自連自：**畫線時，一定要在兩個點之間連線，不能在同一個點上連線，和可自連自相反。例如： 畫的線一定要碰到兩個點，不然，就算是自連自。

七、　**窮舉法：** 是一種數學證明方法，它將所求證的命題分為有限種情形或是等價情形的集合,，然後就每種類型分別檢驗該命題是否成立。在我們的研究中，我們利用窮舉法來驗證各項推論是否正確，也用來算出所有路徑的可能。

八、　**樹狀圖：**是一種將階層式的構造性質，以圖象方式表現出

來。上方是資料的開頭，而下方是資料延伸出去的內容。在我們的研究中，我們利用樹狀圖來畫出每一步的所有可能。

參、文獻探討

一、相關作品分析

我們參考第 50 屆國中數學組科展報告「魔豆連連看」，這份報告主要探討的是線數和塊數，這份報告的摘要如下：

研究豆芽遊戲的規則，跳脫求勝的策略，將步數與塊數的最大與最小範圍找出來；接下來改 變豆芽遊戲的玩法，研究連線數與方法，同時將玩法推展為四面體的遊戲，尋找遊戲的規律。

二、本作品的特色

1. 探討改規則的豆芽遊戲、規律、路徑和圖形。
2. 探討豆芽遊戲原規則「一點連 3 次、中間加點、可自連自」的勝負關鍵。
3. 改變豆芽遊戲的規則
4. 一點連≥2 次、中間不加點、可自連自，我們深入探討此規則。

肆、研究目的

基於上述的研究動機，本研究的目的有：

一、　探究豆芽遊戲原規則之致勝關鍵。

二、　探討豆芽遊戲原規則之先後手所有可能路徑的勝率。

三、　探討 M=3、中間加點、不可自連自之所有可能路徑的勝率。

四、　探討 M=3、中間不加點、不可自連自之所有圖形的規律。

五、　探討 M≥2、中間不加點、可自連自之所有路徑圖形的規律。

六、　探討 M≥2、中間不加點、可自連自之結束時所有可能數量的規律。

伍、研究設備及器材

紙、筆、電腦、小畫家

陸、研究過程或方法

豆芽遊戲

原規則：一點連 3 次，中間加點，可自連自。

⇩

窮盡法：探究所有路徑的可能

中間加點 可自連自	中間加點 不可自連自	中間不加點 可自連自	中間不加點 不可自連自

探討一點連 M 次時，豆芽遊戲的圖形與路徑規律。

驗證：試玩 ⇩ 窮盡 ⇩ 觀察 ⇩ 規律

柒、研究結果

研究一：探討遊戲原規則必勝的關鍵

豆芽遊戲的原規則為「一點連 3 次、中間加點、可自連自」，決定獲勝關鍵是連最後一條線的人獲勝，在試玩過程中，我們覺得會有必勝的畫法，所以，我們利用「窮舉法」將所有的可能性都畫出來，結果發現後手雖有一個必勝的畫法，

但先手的勝率遠遠大於後手，在 130 種畫法中有 118 種畫法是先手勝，只有 12 種是後手勝，且先手避開某些畫法就可 100%獲勝。依照所也可能來看，先手的勝率為 90.7%，後手的為 9.3%。透過樹狀圖，我們窮盡所有的可能，發現圖形會有非常多的路徑可能，因此，我們將圖分成左邊（圖 1）、中間（圖 2）和右邊（圖 3），以下是我們找出的所有路徑可能：

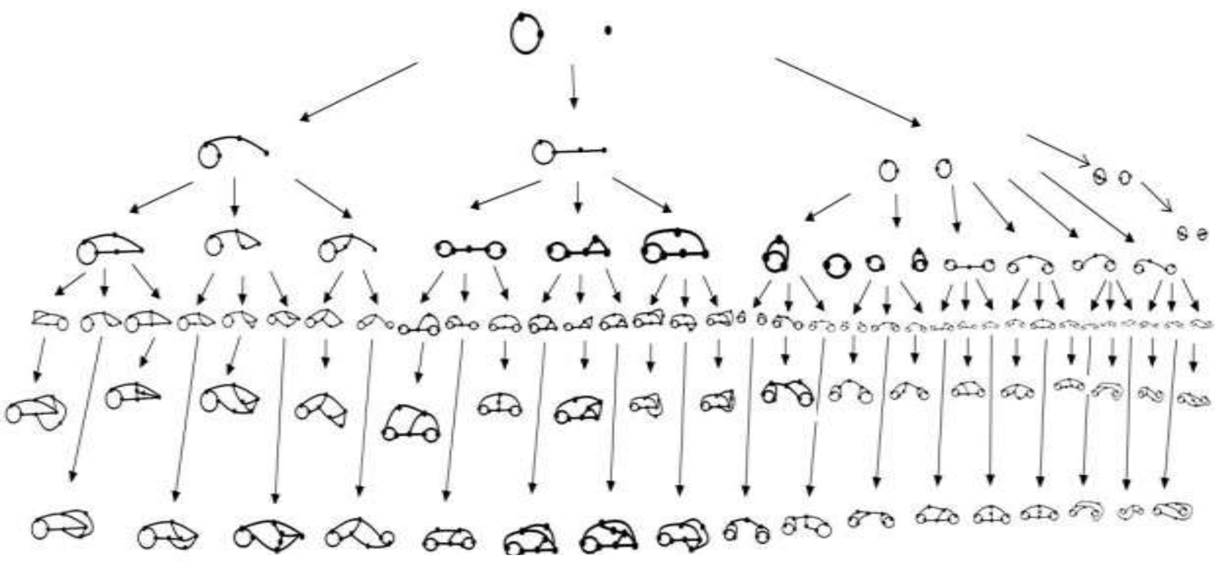


圖 1 一點連 3 次、中間加點、可自連自（左邊）

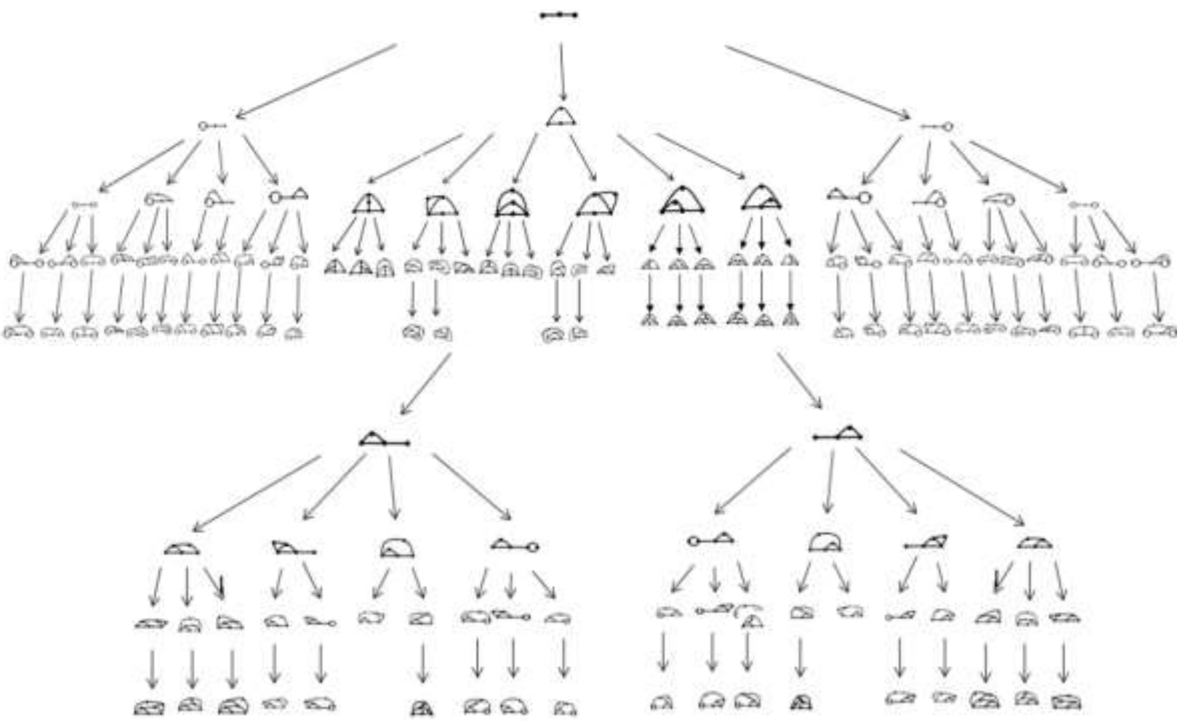


圖 2 一點連 3 次、中間加點、可自連自（中間）

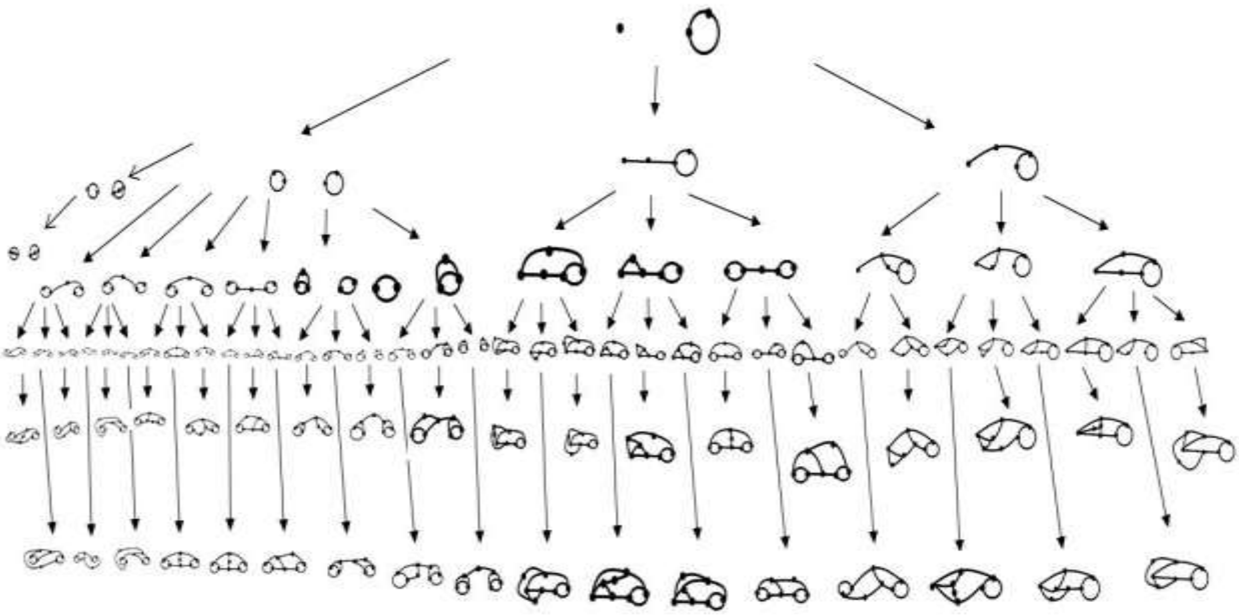


圖 3 一點連 3 次、中間加點、可自連自（右邊）

研究二：M=3、中間加點、不可自連自之所有路徑勝率探討

延伸研究一的發現，我們將規則做了調整，調整規則為「中間加點、不可自連自」，我們利用窮舉法，把所有路徑都畫出來，並把下一步的所有可能的畫法畫出直到不能再畫為止，把每一步的所有可能畫在同一層。我們發現最後結束時共有 38 種可能的路徑，有 2 種在第 3 層結束，為先手獲勝。有 10 種在第 4 層結束，為後手獲勝。有 26 種在第 5 層結束，為先手獲勝。先手獲勝的可能在 38 種裡有 28 種，勝率約為 73.68%，後手獲勝的可能在 38 種裡有 10 種，勝率約為 26.32%

下圖是我們研究出的所有路徑可能：

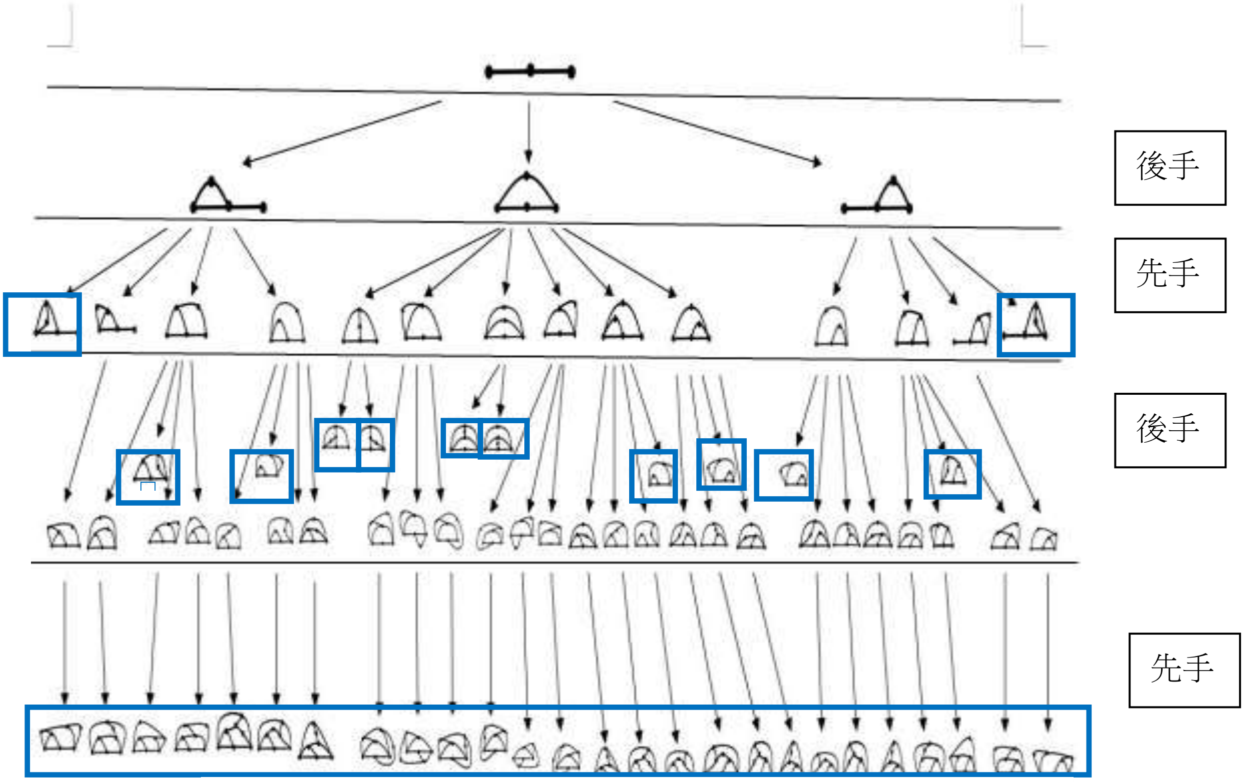
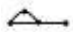
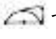
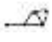
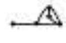


圖 4　一點連 3 次、中間加點、不可自連自樹狀圖

依照圖 4，我們發現，如果玩此規則，要當先手才容易獲勝。第一步時只有一種可能，第二步不論後手畫的是左邊的圖，還是中間，還是右邊，先手都可選擇避開幾種畫法。假如第二步後手畫的為 ，第三步先手只要畫  或  可達到 100%獲勝。假如第二步後手畫的

為，第三步先手只要畫或也可以 100%獲勝。假如第二步後手畫的為，第三步先手只要畫出或就可 100%獲勝。因此，先手只需照上面幾種畫法玩此規則，就可以達到「先手必勝」了。

研究三：M≥3、中間不加點、不可自連自之所圖形規律探討

為探究連線後中間加點與不可自連自，我們調整豆芽遊戲的規則為「中間不加點、不可自連自」，我們利用窮舉法，把所有路徑都畫出來。因為中間不加點，每畫一條線就會減少兩個被碰的次數。因此，M=奇數時，先手的勝率為 100%，先手必勝；M=偶數時，後手的勝率為 100%，後手必勝。因為此規則的限制非常多，所以無論 M=幾，都只有一種畫法。以下是 M=3 至 M=7 的所有路徑，依此類推，M 每增加 1，就會多一層，並且兩個點之間多加一條線。

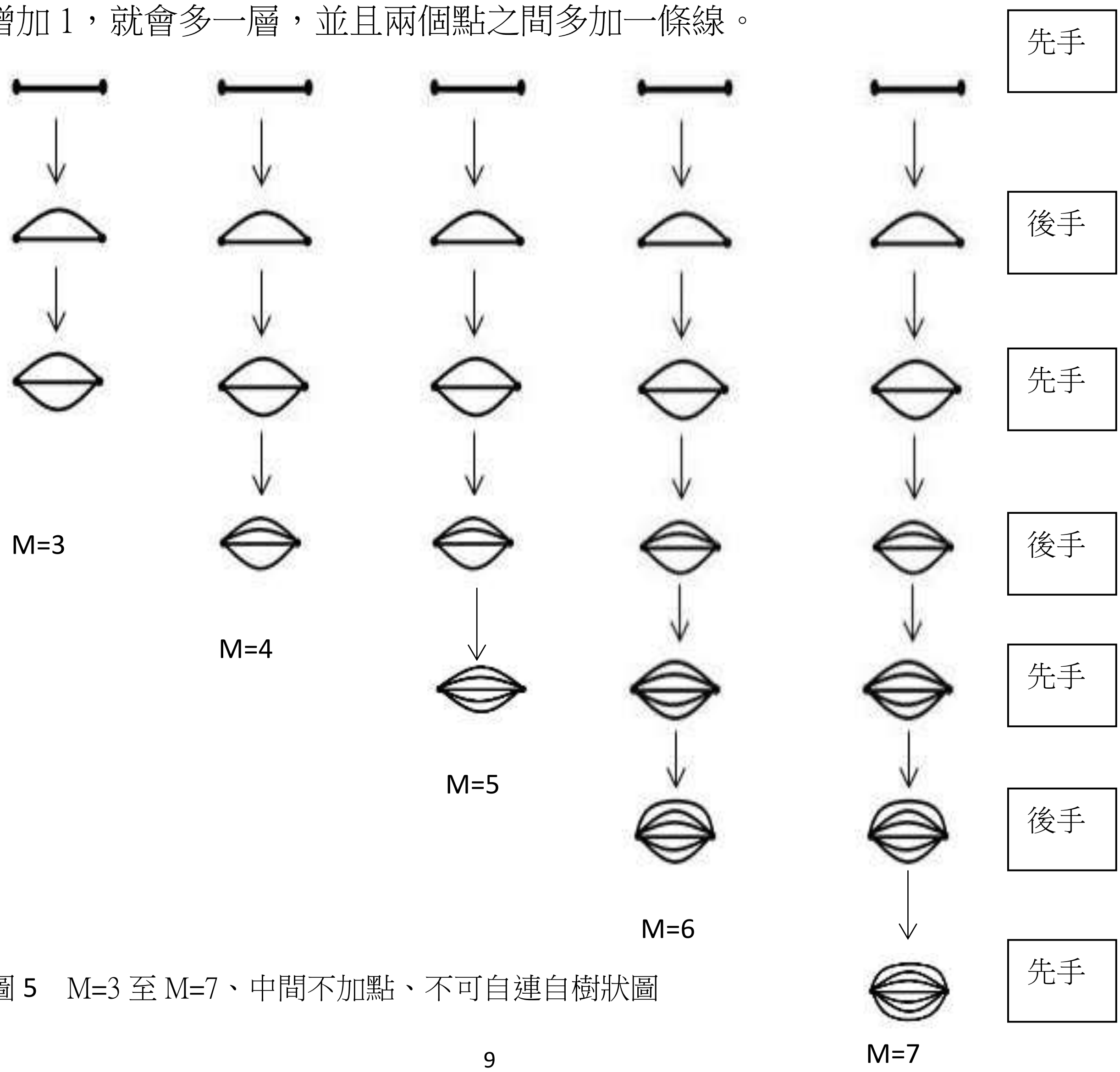


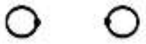
圖 5　M=3 至 M=7、中間不加點、不可自連自樹狀圖

由於此規則限制非常多，因此只會出現一種路徑，就是在兩個中間加一條線。因此我們可推測出 M 每加 1，就會多一層，且 M=幾就會有幾條線，M=20 時，兩個點之間就會有 20 條線，M=2000 時，兩個點之間就會有 2000 條線。

研究四：M≥2、中間不加點、可自連自之所有路徑圖形規律探討

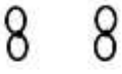
延伸上述的各項研究，我們深入探討「中間不加點、可自連自」，我們利用窮舉法和樹狀圖把所有可能畫出來，由於中間不加點，因此 M=奇數時，先手的勝率為 100%；M=偶數時，後手的勝率為 100%。當 M=3 時所有路徑結束時的可能只有 7 種，M=4 時有 19 種，但到了 M=7 時就突然變得非常多，有 393 種，但是不論結束時有再多種可能，結束的圖案幾乎都是一樣的，我們歸納出 M=2~7 結束時的所有圖形：

M=2 時，最後只會出現 2 種可能

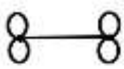



M=3 時，最後只會出現 2 種圖形


M=4 時，最後只會出現 3 種圖形


M=5 時，最後只會出現 3 種圖形

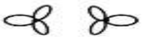

M=6 時，最後只會出現 4 種圖形

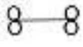
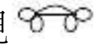
M=7 時，最後只會出現 4 種圖形

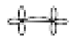
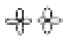
M=8 時，最後只會出現 5 種圖形

M=9 時，最後只會出現 5 種圖形

根據以上圖形，我們歸納出 M=2 至 M=9 的圖形：

1. 每做一次自連自就會使一個點少了兩個被碰的次數，所以 M 只要等於偶數，就會出現一個點上全部都是自連自的情況，M 等於奇數時就會是上一個全部自連自的圖形，在兩個點之間又多加一條線。例如：M=4 時會出現  圖形，而 M=5 時則是在中間多加一條線，變成  圖形，M=6 時中間那條線又會變成全部都是自連自的圖形，變成 ，因此我們可推測出 M=7 時的圖形為 M=6 的圖形中間加一條線，M=8 時的圖形為 2 個起始點各有 4 個自連自。
2. M=2 時，左右兩個起始點都各有一個自連自，M=3 時就在兩個自連自中加上 1 條線，M=4 時則是加上 2 條線，依此類推，M=5 時就是在中間加上 3 條線。例如：當 M=2 時會出現 圖形，而 M=3 是在中間多加上 1 條線，出現 圖形，M=4 時在中間多加上 2 條線，出現 圖形，因此我們可以推出，M=5 時會在中間多加上 3 條線。

3. M=2 時，在兩個起始點之間連 2 條線，M=3 時，在兩個起始點之間連 3 條線。依此類推，M=4 時，在兩個起始點之間會有 4 條線。例如：M=2 時出現圖形，M=3 時就是在中間多加一條線，出現圖形。我們可推測出 M=4 時兩個起始點之間會有 4 條線，M=5 時兩個起時點之間會有 5 條線。
4. M=5 時左右兩邊各有兩個自連自，且中間加 1 條線；M=6 時就是在中間加上 2 條線。依此類推，M=7 時兩個起始點之間會有 3 條線。例如：M=5 時會出現圖形，在兩個起始點中間加上一條線，M=6 時就是在中間加上 2 條線，出現圖形。我們可推測出 M=7 時兩個起始點中間會有 3 條線。

因此，一個自連自會讓一個點減少兩個被碰的次數，M 的數量去除以 2(一個自連自會讓一個點減少兩個被碰個次數)，就會是一個點最多可以出現幾個自連自。M=8 時，最後會有 5 種結束的圖案，因為 8÷2=4，代表會多一種全部有 4 個自連自的圖形，5 種圖形為：、、、、。M=9 時也是會有五種圖形，因為 9÷2=4…1，代表會多一種全部有 4 個自連自的圖形，而且 1 個被碰的次數不能畫一個自連自，因此還是5種結束的可能。利用此規律可推出一個公式：**M÷2+1**，此公式可推導出 M 為多少時，結束時會有多少種圖形。M=4 時為 4÷2+1=3，有 3 種圖形的可能。M=5 時為 5÷2+1，5 除以 2 取整數為 2，2+1=3，也有三種圖形的可能。因此我們可推測出 M=100 時會有幾種結束時的圖形，100÷2+1=51，因此推算出有 51 種圖形。

研究五：M ≥2、中間不加點、可自連自時，以不同路徑結束的所有圖形規律探討

根據前面的研究，我們決定深入探討「M≥2、中間不加點、可自連自」的規則，我們發現這種規則有許多規律，從結束時的圖形來看，和不同路徑畫出來的所有圖形來看，都是有規律的。一開始不同的畫法，結束時總共有幾種可能。以下是我們整理出的規則：

1. M=2 的「左、中、右」加起來會等於 M=3 的「中」，依此類推，M=3 的「左、中、右」加起來會等於 M=4 的「中」。例如：M=2 的「左、中、右」加起來為 3，剛好會等於 M=3 的「中」3；M=5 的「左、中、右」加起來為 51，剛好會等於 M=3 的「中」51。
2. 當 M≥2，「左中、右中」的數會等於「中左、中右」。
3. 當 M≥2，「左左」會等於「右右」，「左右」會等於「右左」，「左中」會等於「右中」。
4. m=2 的「中」的總和會等於 m=3 的「左右」和「右左」，依此類推，m=3 的「中」的總和會等於 m=4 的「左右」和「右左」。
5. m=5 的「左左」3 乘以 m=6 的「左左」10， 會等於 m=7 的「左左」30，m=5 的「左左」3 乘以 m=7 的「左左」30， 會等於 m=8 的「左左」90，依此類推，m=5 的「左左」3 乘以 m=8 的「左左」90， 會等於 m=9 的「左左」270。

表 1 是我們歸納出 m=2~10 的表格：

表 1 當一點連 M 次、中間不加點、可自連自不同路徑所有圖形個數(M=2 至 10)

	左			中			右		
	左左	左中	左右	中左	中中	中右	右左	右中	右右
M=2	1			1			1		
		1			1			1	
M=3	2			3			2		
		1	1	1	1	1	1	1	
M=4	6			7			6		
	1	2	3	2	3	2	3	2	1
M=5	16			19			16		
	3	6	7	6	7	6	7	6	3
M=6	45			51			45		
	10	16	19	16	19	16	19	16	10
M=7	126			141			126		
	30	45	51	45	51	45	51	45	30
M=8	357			393			357		
	90	126	141	126	141	126	141	126	90
M=9	1020			1107			1020		
	270	357	393	357	393	357	393	357	270
M=10	2937			3147			2937		
	810	1020	1107	1020	1107	1020	1107	1020	810

根據我們利用窮舉法把所有可能畫出來後，驗證出此規律是正確無誤的，我們發現，若想推出 M=X 時的數目，不論是「左」、「中」還是「右」，都必須先推論出 M=X-1 的數量，我們按照上述規律，推

算出 M=11~20 圖形數量：

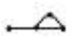
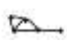
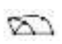
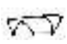
表 2 當一點連 M 次、中間不加點、可自連自不同路徑所有圖形個數 (M=11 至 20)

	左			中			右		
	左左	左中	左右	中左	中中	中右	右左	右中	右右
M=11	8514			9021			8514		
	2430	2937	3147	2937	3147	2937	3147	2937	2430
M=12	24825			26049			24825		
	7290	8514	9021	8514	9021	8514	9021	8514	7290
M=13	72744			75699			72744		
	21870	24825	26049	24825	26049	24825	26049	24825	21870
M=14	214053			221187			214053		
	65610	72744	75699	72744	75699	72744	75699	72744	65610
M=15	632070			649293			632070		
	196830	214053	221187	214053	221187	204053	221187	214053	196830
M=16	1871853			1913433			1871853		
	590490	632070	649293	632070	649293	632070	649293	632070	590490
M=17	5556756			5657139			5556756		
	1771470	1871853	1913433	1871853	1913433	1871853	1913433	1871853	1771470
M=18	16555305			16770651			16555305		
	5341410	5556756	5657139	5556756	5657139	5556756	5657139	5556756	5341410
M=19	49350186			49881261			49350186		
	16024230	16555305	16770651	16555305	16770651	16555305	16770651	16555305	16024230
M=20	147303537			148581633			147303537		
	48072090	49350186	49881261	49350186	49881261	49350186	49881261	49350186	48072090

我們可再利用 M=20 的數量去推測出 M≥21 以後的所有數量，由於 M=20 時總數以大約達到 4 億，因此後面的每一個數都會非常龐大。

捌、結論

一、 經過我們利用樹狀圖把所有可能列出來以後，我們發現在原規則時，先手的勝率約為 90.7%，後手的勝率約為 9.3%。在玩這個規則時，要當先手。因為依照勝率來看，先手贏的機率非常高，我們也發現第二步後手不論怎麼下，先手都可以畫出在第三步的某些圖形導致後手也只能在第四步時畫出某些圖形，而讓先手獲勝。但後手也不是不能獲勝，只要先手第一筆畫的是了或後手就可以在自連自的裡面加上一條線，因此會出現，導致先手只能在另一個起始點上畫一個自連自，讓後手獲勝。

二、 在 M=3、中間加點、不可自連自的規則中，先手的勝率約為 73.68%，後手的勝率約為 26.32%。在玩這個規則時，當先手能有比較大的機率會獲勝。我們發現，雖然先手的勝率不到 100%(必勝)，但是也有辦法必勝，只要你畫出的圖形可讓下一步的後手只有一種畫法，你就可以獲勝。例如：由於此規則為不可自連自，因此第一步只有一種畫法，就是，而第二步後手不論畫出、還是，先手都可以贏。假設後手在第二步時畫出，先手只需在第三步時畫或就可以獲勝，因為畫出的話，後手第四步只能畫，先手就可以在第五步時畫出結束遊戲。如果畫出的畫，後手也沒辦法畫任何東西，因為不可自連自，所以就算最右邊的點只被線碰過一次還是不可以自連自，然後先手就會在第三步時獲勝。假設第二步後手畫出，先手只需在第三步畫出或就可以贏。因為先手第三步如果出，後手第四步不論畫出、還是都不會結束，

而是要到第五步才會結束。先手第三步如果畫出，後手第四步不論畫出、還是也都不直接會結束，也是要到第五步才會結束，因此先手必勝。而後手在第二步時如果畫出，先手也一樣必勝，因為只是圖形相反，結果和會一模一樣。

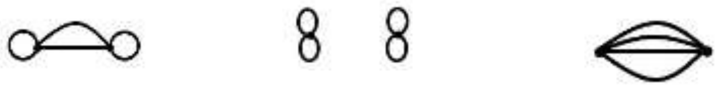
三、　在 M≥3、中間不加點、不可自連自的規則中，我們探討的為圖形規律，由於此規則為中間不加點，因此不論 M 為多少，紙上永遠都只會有兩個點；此規則為不可自連自，因此就只能在兩個起始點之間連線，線的數量為 M，且層的數量也為 M (先手畫一次叫做一層，後手畫一次也做叫一層) ，M 每加 1，兩個點之間的線的數量也會加 1，所以 M=3 時中間有 3 條線，推測出 M=1000 時，中間就會有 1000 條線。

四、　我們深入探討 M≥2、中間不加點、可自連自的規則，發現不論是圖還是結束時的所有數量的數字都有規律，因為此規則為中間不加點，因此我們不探討勝率，而是探討結束時的圖形和數量，當規則有中間不加點時，不論可不可自連自，都是 M 為奇數時先手勝，M 為偶數時後手勝。我們整理出結束時可能出現的圖形，發現有一定的規則存在，以下是我們依照圖形分類並且整理出的 M=2~9 的圖形：

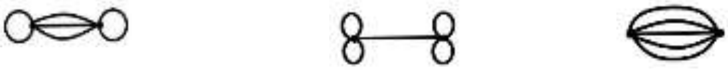
M=2 時，最後只會出現 2 種圖形

M=3 時，最後只會出現 2 種圖形

M=4 時，最後只會出現 3 種圖形



M=5 時，最後只會出現 3 種圖形



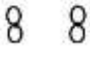
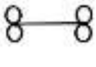
M=6 時，最後只會出現 4 種圖形

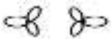
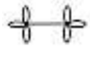
M=7 時，最後只會出現 4 種圖形

M=8 時，最後只會出現 5 種圖形

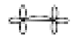
M=9 時，最後只會出現 5 種圖形

根據上面的圖片，我們依照圖形的樣子歸納出了幾種類型：

1. 每做一次自連自就會使一個點少兩個被碰的次數，所以 M 只要等於偶數，就會出現一個點上全部都是自連自的情況，M 等於奇數時就會是上一個全部自連自的圖形，在兩個起始點之間又多加一條線。如：M=4 時會出現圖形，而 M=5 時則是在中間多加一條線，變成，M=6 時中間那條線又會變成全部都是自連

自的圖形，變成，因此我們可推測出 M=7 時的圖形為 M=6 的圖形中間加一條線，變成，M=8 時的圖形為 2 個起始點各有 4 個自連自，變成。

2. M=2 時，左右兩個起始點都各有一個自連自，M=3 時就在兩個自連自中加上 1 條線，M=4 時則是加上 2 條線，依此類推，M=5 時就是在中間加上 3 條線。例如：M=2 時會出現圖形，而 M=3 是在中間多加上 1 條線，出現圖形，M=4 時在中間多加上 2 條線，出現圖形，因此我們可以推出，M=5 時會在中間多加上 3 條線，M=30 時就是 30-2=28，因此兩個起始點中間會有 28 條線。
3. M=4 時左右兩邊各有 2 個自連自，M=5 時的圖形就是左右兩邊的起始點上各有 2 個自連自，且中間加上 1 條線。依此類推，M=6 時兩個起始點之間會有 2 條線，M=28 時左右兩邊各有 2 個自連自，且中間有 24 條線。例如：M=4 時會出現圖形，M=5 時就是在中間 2 多加上 1 條線，出現圖形。我們可推測出 M=6 時兩個起始點中間會有 2 條線，出現。
4. M=6 時的圖形左右兩邊各有 3 個自連自，M=7 時的圖形就是左右兩邊的起始點上各有 3 個自連自，且中間加上 1 條線。依此類推，M=8 時左右兩邊的起始點上各有 3 個自連自，且兩個起始點之間會有 2 條線，M=28 時左右兩邊各有 3 個自連自，且中間有 22 條線。
5. M=2 時，在兩個起始點之間連 2 條線，M=3 時，在兩個起始點之間連 3 條線。依此類推，M=4 時，在兩個起始點之間會有 4 條線。例如：M=2 時出現圖形，M=3 時就是在中間多加一條線，出現圖形。我們可推測出 M=4 時兩個起始點之間會有 4 條線，M=5 時兩個起時點之間會有 5 條線。一個自連自會讓一個點減少兩個被碰的次數，M 的數量去除以 2(一個自連自會讓一個點減少

兩個被碰個次數)，就會是一個點最多可以出現幾個自連自，利用「M÷2」這個公式可算出 M=幾時，一個點上最多會出現幾個自連自。M=8 時，最後會有 5 種結束的圖案，因為 8÷2=4，代表會多一種全部有 4 個自連自的圖形,5 種圖形為：、、、、。M=9 時也是會有五種圖形，因為 9÷2=4…1，代表會多一種全部有 4 個自連自的圖形，而且 1 個被碰的次數不能畫一個自連自，因此還是 5 種結束的可能。利用此規律可推出一個公式：「M÷2+1」，此公式可推出 M 等於幾的時後，結束時會有多少種圖形。M=4 時為 4÷2+1=3，有 3 種圖形的可能。M=5 時為 5÷2+1，5 除以 2 取整數為 2，2+1=3，也有三種圖形的可能。因此我們可推測出 M=100 時會有幾種結束時的圖形，100÷2+1=51，因此算出有 51 種圖形，M=1900 時會有 1900÷2+1 種圖形。

五、 若根據「以不同路徑畫法結束時的所有可能的數量」來分類的話，可以找到許多規律，利用規律可推導出所有數量，以下是我們找出的規律：

1. M=2 的「左、中、右」加起來會等於 M=3 的「中」，依此類推，M=3 的「左、中、右」加起來會等於 M=4 的「中」。例如：M=2 的「左、中、右」加起來為 3，剛好會等於 M=3 的「中」3；M=5 的「左、中、右」加起來為 51，剛好會等於 M=3 的「中」51。
2. 當 M≥2，「左中、右中」的數會等於「中左、中右」。
3. 當 M≥2，「左左」會等於「右右」，「左右」會等於「右左」，「左中」會等於「右中」。
4. M=2 的「中」的總和會等於 M=3 的「左右」和「右左」，依此類推，M=3 的「中」的總和會等於 M=4 的「左右」和「右左」。
5. M=5 的「左左」3 乘以 M=6 的「左左」10， 會等於 M=7 的

「左左」30，M=5 的「左左」3 乘以 M=7 的「左左」30， 會等於 M=8 的「左左」90，依此類推，M=5 的「左左」3 乘以 M=8 的「左左」90， 會等於 M=9 的「左左」270。利用以上規律，我們歸納出 M=2 至 M=10 的圖形個數，並以窮舉法加以驗證，並推論出 M=11 至 M=20 的圖形個數。

玖、研究心得

（一）李心安的研究心得：

很開心這次可以研究這個主題，點點相連—豆芽遊戲之探究，原本我們想要研究魔術方塊，但我們做到研究目的時我們就卡住了，不知道要麼做下去，想了好幾堂課，我們決定要換主題，可是已經 1 月中了，再想下去一定會來不及，我們很苦惱，結果在我去補習時英文老師給我玩了豆芽遊戲，他還跟我們說數學家已經研究一百年了還沒有找到一個必勝的方法，當時我覺得這個遊戲很有趣，也覺得它拿來研究一定很有趣，隔天我就拿來跟同學和老師分享，最後我們就決定研究這個主題。

雖然這次研究蠻辛苦的，寒假延長的兩個禮拜每天都要來學校會樹狀圖、打報告，要趕著科展送件，還去訪問老師，但我們也很高興，因為可以和同學和老師一起做研究，最後得到科展的優等，真是認真後常到最甜美的果實。

這次得研究我要感謝我最好的夥伴李浩霆，他會在我做不完的時候幫助我，我也要感謝李家兆組長、朱老師和龔老師三位老師，他們在我們不知道要怎麼做下去的時候，適時的幫助我們，才可以讓我拿到那麼好的成績。

（二）李浩霆的研究心得

這次的獨立研究並不是一開始就很順利，當我們思考要研究什麼的時候們就卡住了。一開始打算研究魔術方塊，後來發現很多人都研究過這個題目了，而且也沒甚麼創新之處，更在獨立研究初審會時這個想法就被刷掉了。後來李心安介紹了「豆芽遊戲」，也才發現在科展裡只有一組研究過豆芽遊戲，而且他的規則還蠻特別的。

研究豆芽遊戲剛開始，我們就決定把豆芽遊戲的規則改變，變成一種新的玩法，但並沒有非常順利，因為當時我們還不是很了解豆芽遊戲的規則、玩法；直到大概過了 1、2 個禮拜後，我們才發現這遊戲的勝負關鍵在於「畫一條線就要加一個點」，我們就決定把這個規則改變，看看會有什麼特殊的發現。

寒假延長了兩個禮拜，我們幾乎天天來學校研究豆芽遊戲，原本以為要做不完的獨立研究，經過了半個寒假的努力，以及幾乎每天都有發現新東西，我們因此還送了科展。因為送了科展，所以不僅是寒假很辛苦，開學後也很辛苦。科展出審的結果超乎我的預期，我們竟然進了複審，一知道這個消息，我超級開心。因為我們有事先做海報，所以也沒有很趕，只有一直不斷的練習。雖然複審的結果沒有進入國展，但也有拿到優等，努力總算沒有白費，也要謝謝李家兆老師用心的指導，以及龔老師和朱老師的建議。

拾、參考資料及其他

1. 數學遊戲—豆芽遊戲之介紹

取自：

http://calculus.nctu.edu.tw/upload/calculus_web/maple/Site/carnival/game/3.htm

2. **魔豆連連看**。中華民國第 50 屆中小學科學展覽會。國中組數學科第二名。

取自：https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/030419.pdf