

新北市 114 學年度

國小一般智能資賦優異學生獨立研究

參展類別：數學

作品名稱：「魔」高一丈 — 解開魔方陣的數字封印

192	213	234	255	276	297	318	339	360	1	22	43	64	85	106	127	148	169	190
212	233	254	275	296	317	338	359	19	21	42	63	84	105	126	147	168	189	191
232	253	274	295	316	337	358	18	20	41	62	83	104	125	146	167	188	209	211
252	273	294	315	336	357	17	38	40	61	82	103	124	145	166	187	208	210	231
272	293	314	335	356	16	37	39	60	81	102	123	144	165	186	207	228	230	251
292	313	334	355	15	36	57	59	80	101	122	143	164	185	206	227	229	250	271
312	333	354	14	35	56	58	79	100	121	142	163	184	205	226	247	249	270	291
332	353	13	34	55	76	78	99	120	141	162	183	204	225	246	248	269	290	311
352	12	33	54	75	77	98	119	140	161	182	203	224	245	266	268	289	310	331
11	32	53	74	95	97	118	139	160	181	202	223	244	265	267	288	309	330	351
31	52	73	94	96	117	138	159	180	201	222	243	264	285	287	308	329	350	10
51	72	93	114	116	137	158	179	200	221	242	263	284	286	307	328	349	9	30
71	92	113	115	136	157	178	199	220	241	262	283	304	306	327	348	8	29	50
91	112	133	135	156	177	198	219	240	261	282	303	305	326	347	7	28	49	70
111	132	134	155	176	197	218	239	260	281	302	323	325	346	6	27	48	69	90
131	152	154	175	196	217	238	259	280	301	322	324	345	5	26	47	68	89	110
151	153	174	195	216	237	258	279	300	321	342	344	4	25	46	67	88	109	130
171	173	194	215	236	257	278	299	320	341	343	3	24	45	66	87	108	129	150
172	193	214	235	256	277	298	319	340	361	2	23	44	65	86	107	128	149	170

學校：新北市鶯歌國小

研究者：江承諺、張郡修、黃柏熹

目 錄

摘 要	1
壹、研究動機	1
貳、研究目的	1
參、文獻探討	1
肆、研究架構與流程	5
伍、研究過程與方法	5
一、奇數列魔方陣的解法與規律	5
二、雙偶數列魔方陣的解法與規律	9
三、單偶數列魔方陣的解法與規律	16
四、等差數列魔方陣的解法	20
五、魔方陣魔術	22
陸、討論與建議	24
柒、研究結論	25
捌、研究心得	26
參考資料	27

「魔」高一丈-解開魔方陣的數字封印

摘要

本研究以魔方陣為主題，探討不同階數魔方陣的解法與數字排列規律。首先說明魔方陣的基本概念與分類，並依階數分為奇數列、雙偶數列與單偶數列三種類型。研究過程中，針對奇數列魔方陣，運用簡潔連續法建構三階、五階、七階與九階魔方陣，歸納出奇數列魔方陣可透過固定規律完成的特性；在雙偶數列魔方陣方面，探討四階、八階與十二階魔方陣，並以保留對角線法與矩陣法建立魔方陣，了解其對稱與分區組合的規律；在單偶數列魔方陣方面，則以奇數列魔方陣為基礎，透過三階魔方陣擴展與區塊交換方式完成六階魔方陣，並進一步建構十階與十四階魔方陣。

此外，本研究也進一步探討等差數列魔方陣的排列方式，以及三階魔方陣魔術的操作方法與數學原理，並發現此魔術的數字排列並非亂數，而具有固定規律。根據研究結果，不同類型魔方陣具有不同的建構策略，但皆可透過規律性的排列與數學關係加以完成。

壹、研究動機

從小我們就對數學抱持濃厚的興趣，特別喜歡具有邏輯推理與規律性的數學遊戲，例如數獨。到了四年級時，我們進一步認識了「魔方陣」，發現只要將數字依照特定規律排列，每一行、每一列以及對角線的總和都會相同，這樣奇妙的數字關係讓我們感到十分驚奇，也引發了更深的好奇心，使我們開始思考，魔方陣除了常見的解法之外，是否還存在更多不同的規律與變化？我們決定以魔方陣作為研究主題，透過蒐集資料、實際操作與不斷嘗試，探討魔方陣的解法與數字排列規律，並觀察不同類型魔方陣之間的差異與特性。

貳、研究目的

- 一、了解魔方陣的基本概念、發展歷史與不同種類。
- 二、探討不同類型魔方陣的解法與數字排列規律。
- 三、探討等差數列魔方陣的解法。
- 四、探討魔方陣魔術的操作方式與數學原理。

參、文獻探討

一、魔方陣是什麼？

魔方陣是由一組整數依照特定規律排列在正方形方格中所形成的數字圖。在一個 n 階魔方陣中，填入數字 $1 \sim n^2$ ，且每一行、每一列，以及兩條對角線上的數字加總皆相等。

魔方陣的每行、每列與對角線的總和，可由公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 計算。其中， n 代表魔方陣的階數，以三階魔方陣為例，需要在方格中填入 $1 \sim 9$ 這九個數字，將 $n=3$ 代入公式，可得 $\frac{3(3^2+1)}{2}=15$ 。因此，在三階魔方陣中，每一行、每一列以及兩條對角線上的數字加總皆為 15，這也是魔方陣最基本且重要的數學特性。

二、魔方陣的歷史

(一)約西元前 2000 年的「洛書」

關於魔方陣的起源，民間流傳著著名的「洛書」傳說。相傳四千多年前，大禹治水時，洛河中浮現一隻靈龜，龜背上有九種花點組成的圖案，後人將這個圖案稱為「洛書」，並認為它就是三階魔方陣。若將數字 1 到 9 填入九個方格內，可以使每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 15，因此洛書被視為最早的三階魔方陣。

(二)約西元前 200 年的「太乙九宮占盤」

1977 年，中國考古學家在安徽阜陽縣雙古堆西漢古墓中，發現「太乙九宮占盤」，被認為是與魔方陣相關的重要文物之一。此文物呈現九宮排列的形式，與三階魔方陣的概念相似，顯示古代已經出現與魔方陣相關的數字配置。

(三)約西元 1200 年的《續古摘奇算法》

南宋數學家楊輝在《續古摘奇算法》中，整理並介紹多種不同階數的魔方陣，包含三階至十階等形式。書中將三階魔方陣稱為「縱橫圖」，並以文字說明其排列規律：「九子斜排，上下對易，左右相更，四維挺出，戴九履一，左三右七，二四為肩，六八為足。」這段文字說明三階魔方陣的排列方式，是中國古代對魔方陣的重要記錄之一，也比歐洲數學家系統整理魔方陣的時間更早。

(四)現今的魔方陣

隨著時間推移，魔方陣逐漸引起西方數學家的關注與研究。許多數學家開始深入探討魔方陣的結構與性質，並發展出更多不同的排列方法與變化形式，例如高階魔方陣、等差數列魔方陣與特殊魔方陣等，使魔方陣從早期的數字遊戲逐漸發展成為數學研究中的一項重要主題。

三、魔方陣的種類

一般而言，魔方陣依階數可分為三種類型：**奇數列魔方陣**、**雙偶數列魔方陣**以及**單偶數列魔方陣**。這三種類型因為階數不同，其解法與排列規律也不同，因此本研究將分別探討其解法與特性。

(一)奇數列魔方陣

當魔方陣的階數為奇數時，稱為奇數列魔方陣，例如三階、五階、七階等。以三階魔方陣為例，在 3×3 的方格填入數字 1~9，使每一行、每一列及兩條對角線總和皆為 15。

15	15	15	15
15			
15			
15			

(二)雙偶數列魔方陣

當魔方陣的階數為 4 的倍數時，稱為雙偶數列魔方陣，例如：四階、八階、十二階。以四階魔方陣為例，在 4×4 的方格中填入數字 1~16，使每一行、每一列及兩條對角線總和皆為 34。

34	34	34	34	34
34				
34				
34				
34				

(三)單偶數列魔方陣

當魔方陣的階數為偶數，但**不是 4 的倍數**時，稱為單偶數列魔方陣，例如：六階、十階、十四階。以六階魔方陣為例，在 6×6 的方格中填入數字 1~36，使每一行、每一列及兩條對角線總和皆為 111。

111	111	111	111	111	111	111
111						
111						
111						
111						
111						

雖然雙偶數列魔方陣與單偶數列魔方陣都屬於**偶數列魔方陣**，但兩者在數字排列的方式與解題方法上，完全不一樣，這也是我們的研究重點之一。

四、等差數列魔方陣

等差數列魔方陣是指各行、各列的總和呈現等差數列的魔方陣形式。與一般魔方陣不同，等差數列魔方陣各行各列的總和不必相同，而是依序增加或減少，形成等差數列的規律。

以三階魔方陣為例，若各行、各列總和為 14、15、16，則形成公差為 1 的等差數列。若各行、各列總和為 13、15、17，則形成公差為 2 的等差數列。分別如下圖所示。

	14	15	16		13	15	17
14				13			
15				15			
16				17			

五、簡潔連續法

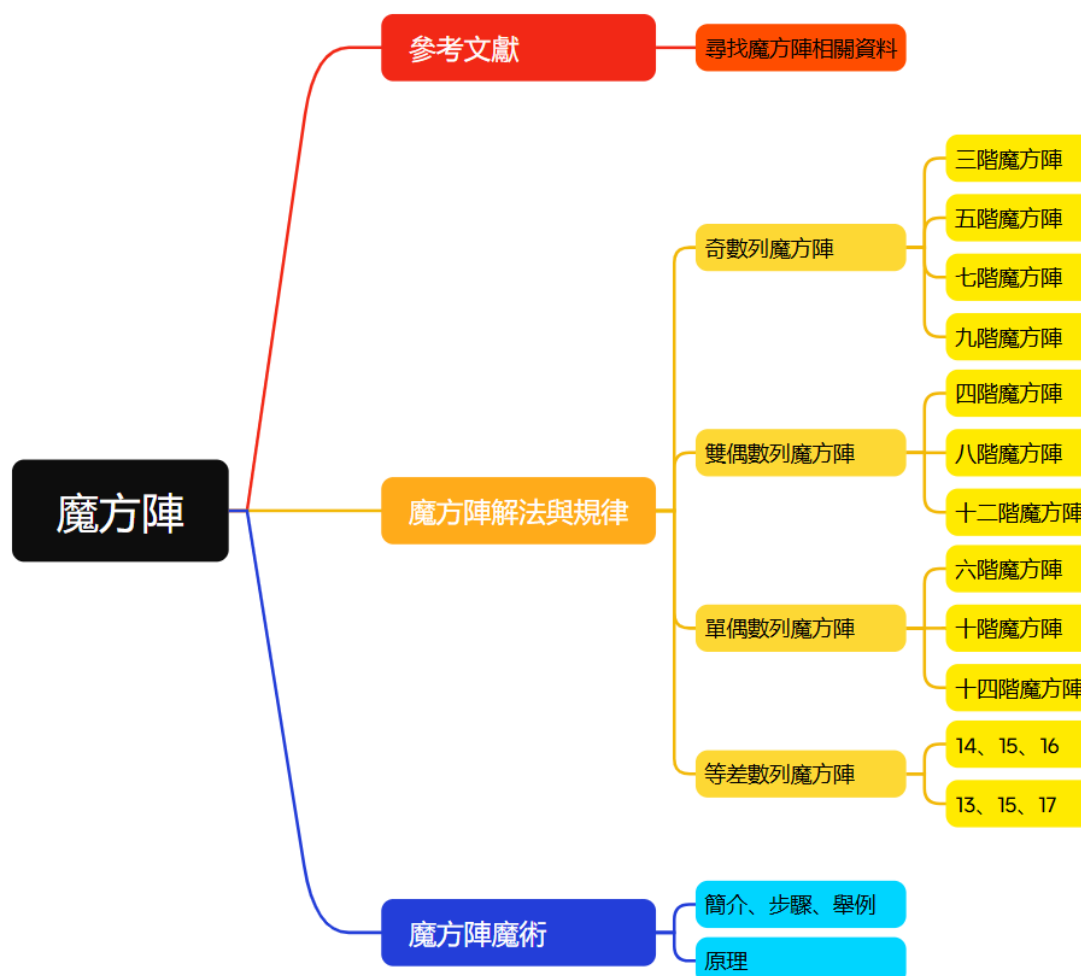
簡潔連續法是一種用來建構奇數列魔方陣的經典方法，僅適用於行數與列數皆為奇數的情況。此方法透過規律且連續的移動方式，依序將數字填入方格中，最終可形成每一行、每一列及兩條對角線和皆相等的魔方陣，因此是建立奇數列魔方陣最常見且有效的方法之一。

簡潔連續法的操作方法如下：

- 步驟 1：在最上排中央位置填入 1。
- 步驟 2：一直往「右上方」移動，依序填入數字 2 至 n^2 。
- 步驟 3：若移動時超出魔方陣邊界，則依以下規則處理：
 - 若超出最上行，則跳到最下排對應位置，繼續填入數字；
 - 若填到最右列，則跳至最左列對應位置，繼續填入數字。
- 步驟 4：若下一步欲填入的位置已經有數字，或是填到最右上角的位置，則改為從原位置向下移動一格，填入數字，再繼續依照往右上方移動的規則填數字。

肆、研究架構與流程

本研究的研究架構與流程，如下圖：



伍、研究過程與方法

一、奇數列魔方阵的解法與規律

(一) 三階魔方阵

● 步驟 1：三階魔方阵需填入 1~9，共有 9 個連續整數，中位數為 $\frac{1+9}{2} = 5$ 。根據三階魔方阵的對稱特性，中位數必須位於魔方阵的中央，因此先將 5 填入中央位置。

	5	

●步驟 2：我們嘗試將**數字 1** 放置於不同位置進行測試。我們發現，若將 1 放在第一行第一列，則無法完成符合條件的魔方陣，如下圖所示，表示此位置不可行。

1	X	2
	5	
8		9

1	X	3
	5	
7		9

1	X	4
	5	
6		9

1	2	X
	5	
	8	9

1	3	X
	5	
	7	9

1	4	X
	5	
	6	9

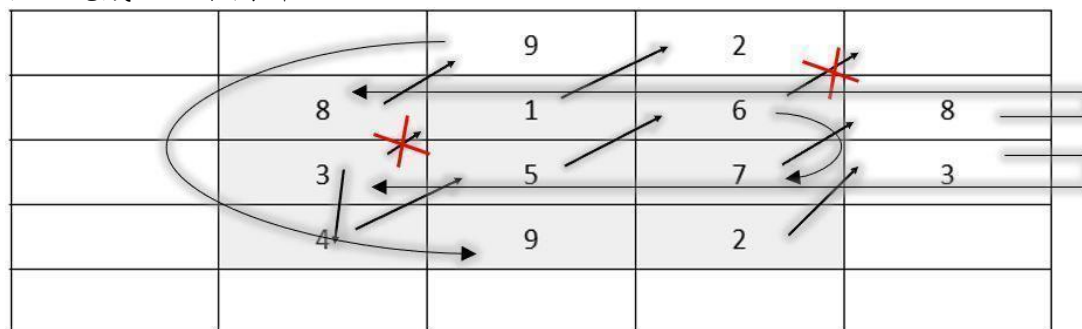
●步驟 3：若將數字 1 放在第一行第二列，則可找到符合魔方陣規則的排列方式，且會產生兩種不同的解法，如圖所示。三階魔方陣完成後，每行、列總和皆為 $\frac{3(3^2+1)}{2}=15$ 。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

進一步觀察發現，經過旋轉與翻轉，只要將數字 1 放在「**中心十字的位置**」（即第一行第二列、第二行第一列、第二行第三列、第三行第二列），皆可以成功構成魔方陣。根據此規律，共可得出 8 種不同的解法，而這些解法本質上可視為**同一組解在平面上的旋轉與翻轉結果**。

此外，由於三階魔方陣屬於奇數列魔方陣，因此亦可透過**簡潔連續法**系統性地完成，如下圖所示。



(二)五階魔方陣

1. 由於簡潔連續法適用於所有奇數列魔方陣，是一種具有通用性的解題方法，因此我們採用簡潔連續法來建構五階魔方陣。完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=5$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{5(5^2+1)}{2}=65$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 65。

65	65	65	65	65	65
65	17	24	1	8	15
65	23	5	7	14	16
65	4	6	13	20	22
65	10	12	19	21	3
65	11	18	25	2	9

2. 使用簡潔連續法建構五階魔方陣，過程如下圖所示：

		18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17	
23	5	7	14	16	23	
4	6	13	20	22	4	
10	12	19	21	3	10	
11	18	25	2	9		

(三)七階魔方陣

本研究同樣採用簡潔連續法來建構七階魔方陣。完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=7$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{7(7^2+1)}{2}=175$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字總和皆為 175。

175 175 175 175 175 175 175 175

175	30	39	48	1	10	19	28
175	38	47	7	9	18	27	29
175	46	6	8	17	26	35	37
175	5	14	16	25	34	36	45
175	13	15	24	33	42	44	4
175	21	23	32	41	43	3	12
175	22	31	40	49	2	11	20

(四)九階魔方陣

本研究同樣採用簡潔連續法來建構九階魔方陣。完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=9$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{9(9^2+1)}{2}=369$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字總和皆為 369。

369 369 369 369 369 369 369 369 369 369

369	47	58	69	80	1	12	23	34	45
369	57	68	79	9	11	22	33	44	46
369	67	78	8	10	21	32	43	54	56
369	77	7	18	20	31	42	53	55	66
369	6	17	19	30	41	52	63	65	76
369	16	27	29	40	51	62	64	75	5
369	26	28	39	50	61	72	74	4	15
369	36	38	49	60	71	73	3	14	25
369	37	48	59	70	81	2	13	24	35

二、雙偶數列魔方陣的解法與規律

(一)四階魔方陣

透過查資料、實際操作與整理，我們發現四階魔方陣可使用兩種方法完成，分別是「保留對角線法」與「矩陣法」。

1. 保留對角線法

保留對角線法是一種適用於雙偶數列魔方陣的基本解法。

- 步驟 1：將 1~16 依序填入 4×4 的方格中。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

- 步驟 2：保留兩條對角線上的數字不變，並將其餘位置的數字旋轉 180°（與中心對稱位置互換），形成新的排列。進一步檢查行列總和，將 $n=4$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{4(4^2+1)}{2}=34$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 34。

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

我們發現，雙偶數列魔方陣可透過對稱結構的調整，使整體數值達到平衡，因此，透過保留對角線法可構成符合條件的四階魔方陣。

2. 矩陣法

運用矩陣法解雙偶數列魔方陣的核心概念，是將魔方陣拆解為「倍數矩陣 × n 」與「餘數矩陣」分別處理，再將兩者合併。我們用矩陣法來建構四階魔方陣，因此，需要先建立「倍數矩陣」與「餘數矩陣」兩種矩陣，再進行整合。

(1)建立倍數矩陣：使用數字 0~3 進行排列。

- 步驟 1：在左上到右下的對角線填入 1、1、2、2。

(0 到 3 的「中間兩數」)

1			
	1		
		2	
			2

- 步驟 2：在另一條對角線填入 3、3、0、0。
(0 到 3 的「最大數與最小數」)

1			3
	1	3	
	0	2	
0			2

- 步驟 3：將四階魔方陣分割為四個區域。

1			3
	1	3	
	0	2	
0			2

- 步驟 4：在剩餘空格處，填入對角方格中的數字，完成倍數矩陣。
(左上角填 2、右上角填 0、左下角填 3、右下角填 1)

1	2	0	3
2	1	3	0
3	0	2	1
0	3	1	2

(2)建立餘數矩陣：使用數字 1~4 進行排列。

- 步驟 1：在其中一條對角線填入 1、4、1、4。
(最大數與最小數交錯)

1			
	4		
		1	
			4

- 步驟 2：在另一條對角線填入 2、3、2、3。
(中間兩數交錯)

1			2
	4	3	
	2	1	
3			4

- 步驟 3：依照類似數獨的填法，將剩餘空格填滿，使每一行與每一列數字不重複，完成餘數矩陣。

1	3	4	2
2	4	3	1
4	2	1	3
3	1	2	4

(3)整合：

- 步驟 1：將倍數矩陣中的每個數字×4，得到新的倍數矩陣。

1	2	0	3
2	1	3	0
3	0	2	1
0	3	1	2

 $\times 4 =$

4	8	0	12
8	4	12	0
12	0	8	4
0	12	4	8

- 步驟 2：將「倍數矩陣×4」與「餘數矩陣」逐格相加，可得到四階魔方陣。進一步檢查行列總和，將 $n=4$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{4(4^2+1)}{2}=34$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 34。

4	8	0	12
8	4	12	0
12	0	8	4
0	12	4	8

 $+$

1	3	4	2
2	4	3	1
4	2	1	3
3	1	2	4

 $=$

5	11	4	14
10	8	15	1
16	2	9	7
3	13	6	12

(二)八階魔方陣

由於 8 為 4 的倍數，八階魔方陣屬於雙偶數列魔方陣，因此我們使用**保留對角線法**建構八階魔方陣。

- 步驟 1：將 1~64 依序填入 8x8 的方格中。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

- 步驟 2：將兩條對角線標上黃色。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

- 步驟 3：將八階魔方陣分成四個區域。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

- 步驟 4：在每一區域中再增加一條對角線，使四個區域皆有兩條對角線。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

●步驟 5：保留兩條對角線上的數字不變，並將其餘位置的數字旋轉 180° （與中心對稱位置互換），形成新的排列。但由於八階魔方陣圖形相當大，若要保留對角線數字、將其他數字旋轉，容易眼花撩亂。

我們發現可將**保留對角線法**改為**旋轉對角線法**，會產生同樣的效果，將標註顏色的數字旋轉 180° （與中心對稱位置互換），即可完成八階魔方陣。完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=8$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{8(8^2+1)}{2}=260$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 260。

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

(三)十二階魔方陣

由於 12 為 4 的倍數，十二階魔方陣同樣屬於雙偶數列魔方陣，因此可使用保留對角線法或旋轉對角線法來建構十二階魔方陣。

將 1~144 依序填入 8×8 的方格中，並分成 9 個 4×4 區塊，將 4×4 區塊中的對角線數字標上顏色，並保留不動，其餘位置的數字旋轉 180°（與中心對稱位置互換），形成新的排列。完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=12$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{12(12^2+1)}{2}=870$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 870。

1	143	142	4	5	139	138	8	9	135	134	12
132	14	15	129	128	18	19	125	124	22	23	121
120	26	27	117	116	30	31	113	112	34	35	109
37	107	106	40	41	103	102	44	45	99	98	48
49	95	94	52	53	91	90	56	57	87	86	60
84	62	63	81	80	66	67	77	76	70	71	73
72	74	75	69	68	78	79	65	64	82	83	61
85	59	58	88	89	55	54	92	93	51	50	96
97	47	46	100	101	43	42	104	105	39	38	108
36	110	111	33	32	114	115	29	28	118	119	25
24	122	123	21	20	126	127	17	16	130	131	13
133	11	10	136	137	7	6	140	141	3	2	144

三、單偶數列魔方陣的解法與規律

單偶數列魔方陣的階數是偶數但不是 4 的倍數，其解法較為複雜。本研究針對六階魔方陣、十階魔方陣、十四階魔方陣，探討其建構方法與規律。

(一)六階魔方陣

六階魔方陣屬於單偶數列魔方陣。我們利用三階魔方陣為基礎，透過數值平移與區塊交換的方式，建構六階魔方陣，步驟如下：

- 步驟 1：因 $6 \div 2 = 3$ ，先用簡潔連續法完成三階魔方陣，作為基本矩陣，如矩陣 A。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

矩陣 A

- 步驟 2：將矩陣 A 中的數字不斷加上 9 ($3 \times 3 = 9$)，形成 3 個新矩陣。

8+9	1+9	6+9
3+9	5+9	7+9
4+9	9+9	2+9

矩陣 A 中的每個數字加上 9

→

17	10	15
12	14	16
13	18	11

矩陣 B

17+9	10+9	15+9
12+9	14+9	16+9
13+9	18+9	11+9

矩陣 B 中的每個數字再加上 9

→

26	13	24
21	23	25
22	27	20

矩陣 C

26+9	13+9	24+9
21+9	23+9	25+9
22+9	27+9	20+9

矩陣 C 中的每個數字再加上 9

→

35	28	33
30	32	34
31	36	29

矩陣 D

●步驟 3：依序將矩陣 A、C、D、B 填入 6×6 方格中。

（◎注意：要將矩陣 A 填入左上角，矩陣 C 填入右上角，矩陣 D 填入左下角，矩陣 B 填入右下角。）

矩陣 A			矩陣 C		
矩陣 D			矩陣 B		

→

8	1	6	26	13	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

●步驟 4：接著在左上區塊與左下區塊中，依「主對角線方向（左上→中→左下）」標記數字，並將兩區對應位置交換，即可調整為符合魔方陣條件的六階魔方陣。

完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=6$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{6(6^2+1)}{2}=111$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 111。

8	1	6	26	13	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

→

35	1	6	26	13	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

(二)十階魔方陣

十階魔方陣屬於單偶數列魔方陣，可依相同概念延伸建構，步驟如下：

- 步驟 1：因 $10 \div 2 = 5$ ，先用簡潔連續法完成五階魔方陣。
- 步驟 2：將五階魔方陣中的數字不斷加上 25 ($5 \times 5 = 25$)，形成三個新矩陣。
- 步驟 3：依 A、C、D、B 的順序排列成 10×10 方陣。
- 步驟 4：在左上與左下區塊中，標記「左上→中心→左下」對角線位置並交換數字，即完成十階魔方陣。

完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=10$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{10(10^2+1)}{2} = 505$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆為 505。

92	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	80	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	88	20	22	54	56	63	70	72
10	87	19	21	3	60	62	69	71	53
86	18	25	2	9	61	68	75	52	59
17	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	5	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	13	95	97	29	31	38	45	47
85	12	94	96	78	35	37	44	46	28
11	93	100	77	84	36	43	50	27	34

(三)十四階魔方陣

十四階魔方陣亦屬單偶數列魔方陣，可採相同方法建構，步驟如下：

- 步驟 1：因 $14 \div 2 = 7$ ，先用簡潔連續法完成七階魔方陣。
- 步驟 2：將七階魔方陣中的數字不斷加上 49 ($7 \times 7 = 25$)，形成三個新矩陣。
- 步驟 3：依 A、C、D、B 的順序排列成 14×14 方陣。
- 步驟 4：在左上與左下區塊中，標記「左上→中心→左下」對角線位置並交換數字，即完成十四階魔方陣。

完成後，進一步檢查行列總和，將 $n=14$ 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，可得 $\frac{14(14^2+1)}{2} = 1379$ ，每一行、每一列和兩條對角線上的數字加總皆 1379。

177	39	48	1	10	19	28	128	137	146	99	108	117	126
38	194	7	9	18	27	29	136	145	105	107	116	125	127
46	6	155	17	26	35	37	144	104	106	115	124	133	135
5	14	16	172	34	36	45	103	112	114	123	132	134	143
13	15	171	33	42	44	4	111	113	122	131	140	142	102
21	170	32	41	43	3	12	119	121	130	139	141	101	110
169	31	40	49	2	11	20	120	129	138	147	100	109	118
30	186	195	148	157	166	175	79	88	97	50	59	68	77
185	47	154	156	165	174	176	87	96	56	58	67	76	78
193	153	8	164	173	182	184	95	55	57	66	75	84	86
152	161	163	25	181	183	192	54	63	65	74	83	85	94
160	162	24	180	189	191	151	62	64	73	82	91	93	53
168	23	179	188	190	150	159	70	72	81	90	92	52	61
22	178	187	196	149	158	167	71	80	89	98	51	60	69

四、等差數列魔方陣的解法

等差數列魔方陣跟一般的魔方陣不同，各行各列的總和不必要相同，而是依照等差數列規律變化。以三階等差數列魔方陣為例，三行總和可能為 14、15、16，三列總和亦為 14、15、16，呈現公差為 1 的等差數列。此外，等差數列魔方陣與一般魔方陣相同，也可透過旋轉與翻轉得到不同排列。

(一)三階 13, 15, 17 等差數列魔方陣

- 步驟 1：先用簡潔連續法完成三階魔方陣，作為基本矩陣。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

- 步驟 2：交換 8 與 6 的位置。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

 →

6	1	8
3	5	7
4	9	2

- 步驟 3：交換 6 與 4 的位置，即可得到 13, 15, 17 的等差數列魔方陣。

	13	15	17
6	1	8	
3	5	7	
4	9	2	

 →

13	4	1	8
15	3	5	7
17	6	9	2

(二)三階 14, 15, 16 等差數列魔方陣

- 步驟 1：先用簡潔連續法完成三階魔方陣，作為基本矩陣。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

- 步驟 2：交換 6 與 7 的位置。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

→

8	1	7
3	5	6
4	9	2

- 步驟 3：交換 3 與 4 的位置。

8	1	7
3	5	6
4	9	2

→

8	1	7
4	5	6
3	9	2

- 步驟 4：交換 7 與 8 的位置。

8	1	7
4	5	6
3	9	2

→

7	1	8
4	5	6
3	9	2

- 步驟 5：將上排數字與下排數字交換位置，即可完成三階 14, 15, 16 等差數列魔方陣。

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

五、魔方陣魔術

(一)「三階魔方陣魔術」簡介

三階魔方陣魔術是利用 3x3 方格中的數字排列，讓觀眾選擇三個數字，這三個數字的總和一定等於魔術師預言的數字。步驟如下：

- 步驟 1：魔術師在 3x3 方格中填入數字 1~9。
- 步驟 2：魔術師跟觀眾說：「你選的三個數字相加，會等於我在紙上寫的數字。」魔術師在紙上寫下預言數字（15），不讓觀眾看到。
- 步驟 3：觀眾選第一個數字，魔術師刪去該數字所在的行與列。
- 步驟 4：觀眾從剩下的數字中選擇第二個數字，魔術師再刪去該數字所在的行與列。
- 步驟 5：此時只剩下一個數字，觀眾只能選取該數字。
- 步驟 6：魔術師將紙攤開，紙上的預言數字為 15，而觀眾選取的三個數字加總必為 15 與預言相同，魔術完成。

(二)以「三階魔方陣魔術」範例

- 步驟 1：魔術師事先在 3x3 方格中填入數字 1~9。
- 步驟 2：魔術師跟觀眾說：「你選的三個數字相加，會等於我在紙上寫的數字。」魔術師在紙上寫下預言數字（15），不讓觀眾看到。
- 步驟 3：觀眾選 3，表演者把橫行 1、2 刪去，直列 6、9 刪去。
- 步驟 4：剩下 4、5、7、8，觀眾選 4，表演者把橫行 5 刪去，直列 7 刪去。
- 步驟 5：剩下 8，觀眾只能選 8。
- 步驟 6：魔術師將紙攤開，紙上的預言數字為 15，而 $3+4+8=15$ ，與預言相同，魔術完成。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(三)「三階魔方陣魔術」原理

三階魔方陣魔術的原理來自三階魔方陣的性質， $n=3$ 帶入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，就可以知道每行、每列相加皆為 $\frac{3(3^2+1)}{2}=15$ ，當觀眾每次選擇一個數字並刪去該數字所在的行與列時，三次選擇的數字必定位於不同的行與列，因此最後選出的三個數字一定形成魔方陣中的一條直線（橫列、直行或對角線），其總和必為 15。總和為 15 的所有可能共有 8 種：

- $1+5+9=15$
- $1+6+8=15$
- $2+4+9=15$
- $2+5+8=15$
- $2+6+7=15$
- $3+4+8=15$
- $3+5+7=15$
- $4+5+6=15$

這個魔術 3×3 方格的設置不可為亂數排列，我們發現，它的規則是：

1、4、7 在同一行或同一列；2、5、8 在同一行或同一列；

3、6、9 在同一行或同一列。1、2、3 同一行或同一列；

4、5、6 同一行或同一列；7、8、9 同一行或同一列。

必須按照以上規則在 3×3 方格裡填入數字 1~9，作為魔術前設置，接著按照魔術流程，觀眾選出的三個數字加起來才會是 15。

此外，魔術前 3×3 方格的設置，最基礎的填法是依序填入 1~9，但其實還有很多種可能性符合以上規則，以下列出 20 個：

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	3	2
4	6	5
7	9	8

2	1	3
5	4	6
8	7	9

2	3	1
5	6	4
8	9	7

3	1	2
6	4	5
9	7	8

3	2	1
6	5	4
9	8	7

1	2	3
7	8	9
4	5	6

1	3	2
7	9	8
4	6	5

2	1	3
8	7	9
5	4	6

2	3	1
8	9	7
5	6	4

3	1	2
9	7	8
6	4	5

3	2	1
9	8	7
6	5	4

1	4	7
2	5	8
3	6	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

1	4	7
3	6	9
2	5	8

2	5	8
1	4	7
3	6	9

2	5	8
3	6	9
1	4	7

3	6	9
1	4	7
2	5	8

3	6	9
2	5	8
1	4	7

3	9	6
1	7	4
2	8	5

經過實際測試後，我們發現三階以上的方陣，也都可以用同樣的流程進行魔術。將階數 n 代入公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ，即為魔術師預言數字，觀眾選擇的 n 個數字加總必定等於該預言數字。

例如：

- 3×3 方陣 → 觀眾選出 3 個數字 → 總和為 15
- 4×4 方陣 → 觀眾選出 4 個數字 → 總和為 34
- 5×5 方陣 → 觀眾選出 5 個數字 → 總和為 65

陸、討論與建議

一、可進一步探討更高階魔方陣的規律

本研究已探討三階至九階奇數列魔方陣，與四階、八階、十二階雙偶數列魔方陣，以及六階、十階、十四階單偶數列魔方陣。未來可持續延伸至更高階的魔方陣，觀察其排列方式是否仍符合本研究所整理的規律，並進一步驗證簡潔連續法、保留對角線法與矩陣法等方法之通用性。

二、可探討不同類型魔方陣之間的轉換關係

本研究發現，三階魔方陣可透過旋轉、翻轉形成不同解法，且單偶數列魔方陣可由奇數列魔方陣進行延伸建構。未來可進一步探討，不同類型魔方陣之間是否存在更多轉換規律，並分析不同階數魔方陣之間的轉換關係。

三、可發展電腦程式輔助建構魔方陣

由於高階魔方陣之建構較為複雜，未來可利用電腦程式或試算表工具，自動生成不同階數的魔方陣，並驗證行列與對角線總和是否相等，提升研究效率並減少人工計算或操作所產生的錯誤。

四、可研究等差數列魔方陣的通用建構方法

本研究僅以三階等差數列魔方陣為例，透過數字交換建立行列和呈等差變化的魔方陣。未來可進一步探討五階、七階甚至更高階的等差數列魔方陣，並嘗試歸納出可適用於各階數的通用建構規則，使等差數列魔方陣之建構更具系統性。

五、可設計更多魔方陣相關數學魔術或遊戲

本研究探討了三階魔方陣魔術的原理，且發現更高階數方陣也都可以用同樣的流程進行魔術。未來可試著找出不同階數的數字排列規則，或改變魔術操作方式，設計更多魔方陣相關的數學魔術或遊戲。透過魔方陣與魔術或數學遊戲的結合，可提升趣味性與應用性。

柒、研究結論

一、不同階數魔方陣皆通用的公式

在 n 階魔方陣中，填入 $1 \sim n^2$ 的連續整數，使每一行、每一列及兩條對角線的總和皆相等，總和可由公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 計算出。

二、奇數列魔方陣的解法與規律

研究發現，當魔方陣階數為奇數時，可透過簡潔連續法依序填入數字，先將數字 1 放在第一行的中央位置，並依照「往右上移動」與「邊界跳轉」的規則，即可完成魔方陣。本研究實際建構三階、五階、七階與九階魔方陣，均可利用此方法完成，由此可知，簡潔連續法具有通用性，可適用於所有奇數列魔方陣。

二、雙偶數列魔方陣的解法與規律

當魔方陣階數為 4 的倍數時，屬於雙偶數列魔方陣。本研究發現，四階與八階魔方陣可利用保留對角線法完成，透過保留對角線數字並將其餘數字旋轉，可形成符合條件的魔方陣。此外，將魔方陣拆分為倍數矩陣與餘數矩陣，再加以整合，亦可成功建構四階魔方陣。

三、單偶數列魔方陣的解法與規律

製造一個，將基本魔方陣依序加上 $n \times n$ ，加四次，並照著 a, c, d, b 的順序排列，接著把「左上及左下中的左上至中至左下標上顏色並對調，即可完成單偶數列魔方陣。

四、單偶數列魔方陣的解法與規律

研究發現，單偶數列魔方陣與奇數列魔方陣之間具有密切關聯。要破解單偶數列魔方陣，可先將階數 $\div 2$ ，用簡潔連續法建構 $\frac{n}{2}$ 階的基本魔方陣 A，不斷加上 $n \times n$ ，形成 3 個新矩陣 B、C、D，將矩陣依 A、C、D、B 填入。在左上與左下區塊中，標記「左上 $\rightarrow$ 中心 $\rightarrow$ 左下」對角線位置並交換數字，即可完成單偶數列魔方陣。

四、等差數列魔方陣的解法

本研究發現，以一般魔方陣為基礎，透過交換部分數字的位置，可使各行各列的總和呈現等差數列變化，形成等差數列魔方陣。以三階魔方陣為例，可建構出 13、15、17 和 14、15、16 等不同形式，由此可知，魔方陣除了固定總和外，仍可延伸出不同變化型態。

五、魔方陣魔術

透過三階魔方陣魔術的研究，只要按照魔術流程，觀眾所選三個數字的總和必定為 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 。更進一步發現，三階以上的方陣，都可以用同樣的流程進行魔術。魔方陣不僅具有數學規律，也可應用於數學遊戲與魔術活動中。

捌、研究心得

●研究者：江承諺

我在四年級時初次認識魔方陣，到了六年級，我想知道魔方陣到底是什麼、魔方陣怎麼解，以及是否有更高階的魔方陣。為了深入了解魔方陣，我和我同組的同學一起做了這篇研究。一開始，我們先做了做簡單的資料蒐集，了解簡潔連續法後，就開始了第一個實驗——奇數列中最簡單的三階魔方陣。因為使用簡潔連續法，這部分還算順利。接著，我們做了雙偶數列魔方陣，也就是四階跟八階的魔方陣，我們使用了保留對角線法，過程也不算太困難。之後我們進入單偶數列魔方陣，也就是六階魔方陣，這部分我們找了很多資料，也實作了很多次，最後仍然成功完成。

接著進入整篇研究中最讓我頭痛的部分——等差數列魔方陣。原本我希望能夠做到 12、15、18，但做到 14、15、16 時就已經快爆炸了。雖然在研究報告上看非常的乾淨、簡單，但我們其實實驗了非常多表格，也花了超級多時間。後來我們以三階基本魔方陣為基礎，將 14, 15, 16 跟 13, 15, 17 都進行改造，結果兩種都成功了，讓我們非常高興。很快的，我們又進入最後一個主題——魔方陣魔術。我們先從網路上蒐集資料，再開始實驗，其中最困難的是亂數排列。我們嘗試了很多種數字排法，最後得到結論，也讓整個研究告一段落。

在這次的研究中，我學到的第一件事是如何與同伴合作。我們這組有一位轉學生，在多次討論後決定讓他加入，一開始雙方很難理解彼此的想法，但後來漸漸能互相理解與幫助。第二個收穫當然是對魔方陣的認識，雖然還有一些地方未盡完善，但對我來說已經完成得很不錯了。最後，我覺得魔方陣非常好玩，也希望能成為更多人研究的目標。

●研究者：張郡修

一開始我最想知道的是魔方陣魔術的新規則與排列方法，並觀察不同階數魔方陣之間的差異。為了找出規則，我花了最多時間，也覺得這是最困難的一部分。我不斷整理自己查到的資料，最後終於發現一個規律：1、4、7 在同一行或同一列；2、5、8 在同一行或同一列；3、6、9 在同一行或同一列；同時 1、2、3 必須在同一行或同一列；4、5、6 在同一行或同一列；7、8、9 在同一行或同一列。

我覺得魔方陣既困難又有趣，可以不斷發現新事物，例如：魔方陣魔術會有不同的規則與排列方法，不同階數的魔方陣也有不同的規律。我認為找出所有規則是最困難的，這對我來說，就如同海底撈針一般難；而發現新的規則與排列方式則是最有趣的部分。我覺得計算各階魔方陣總和的公式 $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 是最特別的。完成研究後，我最大的感受是有志者事竟成，只要努力不懈，一定可以做到。下次遇到困難時，我也會和同學一起討論不懂的地方，這樣能更有效地解決問題。

●研究者：黃柏熹

這個研究中，我最想知道的是如何從一般魔方陣變成有趣的等差數列魔方陣。為了達成這個目標，我先參考許多文獻，嘗試做出等差數列魔方陣，接著自己實驗，再從中觀察規律，最後利用這些規律驗證是否可行。在研究過程中，我覺得這部分是最困難也最花時間的，因為查到的文獻都沒有詳細說明做法，只能不斷嘗試並找出規律，但常常沒有進展，有時候也會不想繼續做。

不過我告訴自己一定有辦法找到解法，因此持續嘗試。每次失敗都帶來挫折感，但經過一次次實驗後，我終於發現規律，並學會如何製作三階等差數列魔方陣。在這個過程中，我學到遇到困難時不要退縮，而是要想辦法解決問題。此外，我也體會到研究時要先自己動手嘗試，而不是直接抄網路資料，否則有時候反而會浪費更多時間。當研究完成時，我感覺整個人都放鬆下來，因為終於把研究完成並可以交出去，也讓我對這次研究留下深刻的印象。

參考資料

一、研究資料

1. 黃欣怡等(2012)。找尋三階質數魔方陣。中華民國第 52 屆中小學科學展覽會作品說明書。
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/030410.pdf>
2. 曾子耆等(2015)。廣義 3 階魔方陣之研究。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會作品說明書。
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/55/pdf/030402.pdf>
3. 魔方陣的預言。屏東縣第 61 屆國中小學科學展覽會作品說明書。
https://sci.ptc.edu.tw/Pthsci61/Upfile/Works/1614736895_794829_90.pdf
4. 鍾予閔(2004)。魔方陣的變化球!。中華民國第 44 屆中小學科學展覽會作品說明書。
<https://www.ntsec.edu.tw/article/FileAtt.ashx?id=1042>
5. 以跳組跳位解析 4K 階類型的鬼方陣。臺南市 109 年度國小學生獨立研究競賽作品。
<https://serc.tn.edu.tw/wp-content/uploads/2020/11/%E7%AC%AC%E4%BA%8C%E5%90%8D-%E9%BA%BB%E8%B1%86%E5%9C%8B%E5%B0%8F-%E4%BB%A5%E8%B7%B3%E7%B5%84%E8%B7%B3%E4%BD%8D%E8%A7%A3%E6%9E%904K%E9%9A%8E%E9%A1%9E%E5%9E%8B%E7%9A%84%E9%AC%BC%E6%96%B9%E9%99%A3.pdf>
6. 魔方陣 123 看誰先達陣。臺南市 108 年度國小學生獨立研究競賽作品。
https://serc.tn.edu.tw/wp-content/uploads/2020/06/ES18_%E9%AD%94%E6%96%B9%E9%99%A3123%E7%9C%8B%E8%AA%B0%E5%85%88%E9%81%94%E9%99%A3.pdf
7. 蔡鈞存等(2024)。雙偶幻方之研究與破解。中華民國第 64 屆中小學科學展覽會作品說明書。
<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/64/pdf/NPHSF2024-030417.pdf?0.7400696235708892>
8. 劉任昌。一個 $2n$ (n 為奇數) 階魔方陣的簡單解法。
<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d212/21209.pdf>
9. 聶春笑。楊輝的六階幻方。

<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d404/40410.pdf>

10. 由三階幻方得出六階幻方。

http://www.mathsgreat.com/magic_sq/magic_sq_025.pdf

11. 李祐宗。魔方陣與物理的邂逅。

<https://www.ntsec.gov.tw/article/FileAtt.ashx?id=6416>

12. 羅雅勻等(2022)。「魔」頂「方」踵一破解任意階魔方陣之研究。高雄市

112 年度國小學生獨立研究成果發表競賽得獎作品。

https://class.kh.edu.tw/sites/12821/upload_file/179/%E3%80%8C%E9%AD%94%E3%80%8D%E9%A0%82%E3%80%8C%E6%96%B9%E3%80%8D%E8%B8%B5--%E7%A0%B4%E8%A7%A3%E4%BB%BB%E6%84%8F%E9%9A%8E%E9%AD%94%E6%96%B9%E9%99%A3%E4%B9%8B%E7%A0%94%E7%A9%B6%E9%A0%81%E7%89%88.pdf

13. 李彥頡。幻方研究。

<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/37/pdf/37h/147.pdf>

二、網路資料

1. 幻方－維基百科。

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%B9%BB%E6%96%B9>

2. 科技大觀園的貼文。

<https://www.facebook.com/scitechvista/posts/%E9%AD%94%E6%96%B9%E9%99%A3-magic-square-%E9%AD%94%E6%96%B9%E9%99%A3%E5%8F%88%E5%8F%AB%E5%B9%BB%E6%96%B9%E9%AD%94%E6%96%B9%E7%B8%B1%E6%A9%AB%E5%9C%96%E6%98%AF%E5%B0%87%E5%BE%9E1%E9%96%8B%E5%A7%8B%E7%9A%84%E9%80%A3%E7%B8%A8%E6%AD%A3%E6%95%B4%E6%95%B8%E5%BB%A3%E7%BE%A9%E7%9A%84%E9%AD%94%E6%96%B9%E9%99%A3%E6%95%B8%E5%AD%97%E5%8F%AF%E4%B5%A5%E4%B8%8D%E9%80%A3%E7%BA%8C%E6%8E%92%E5%88%97%E6%88%90%E6%AD%A3%E6%96%B9%E5%BD%A2%E8%AE%93%E5%AE%83%E4%B8%8D%E7%AE%A1%E7%9B%B4%E7%9A%84%E6%A9%AB%E7%9A%84%E6%96%9C%E7%9A%84%E6%96%9C%E7%9A%84%E6%8C%87%E5%B0%8D%E8%A7%92%E7%B7%9A%E6%95%B8%E5%AD%97%E5%8A%A0%E7%B8%BD/2244552268967526/>

3. 魔方陣。

<http://www.mathland.idv.tw/fun/mag.html>

4. 幻方的歷史及發展。

https://www.angelfire.com/magic2/magic_square/history.htm

5. 魔方陣(機器)。

<http://math.ccsn.tp.edu.tw/~rick/cai/number/msquare.php>

6. 魔方陣-維基百科。

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%AD%94%E6%96%B9%E9%99%A3>

7. 幻方-維基百科。

https://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square

8. 等差數列-維基百科。

<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%AD%89%E5%B7%AE%E6%95%B0%E5%88%97>